

Έστω διάλυμα άλατος ΒΗΑ, της ασθενούς βάσης Β και του ασθενούς οξέος ΗΑ, συγκέντρωσης c .
Να αποδείξετε ότι:

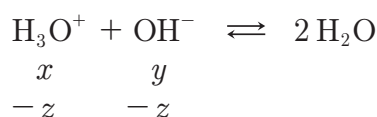
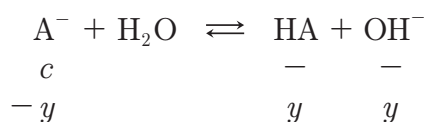
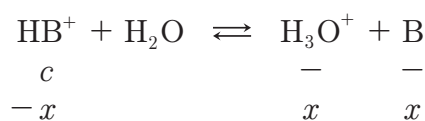
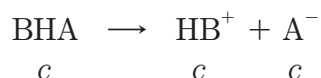
i. αν $K_a(\text{HA}) = K_b(\text{B})$ τότε: $\text{pH} = 7$

ii. αν $K_a(\text{HA}) > K_b(\text{B})$ τότε: $\text{pH} < 7$

iii. αν $K_a(\text{HA}) < K_b(\text{B})$ τότε: $\text{pH} > 7$

Δίνεται: $\theta = 25^\circ\text{C}$, $K_w = 10^{-14}$

Απόδειξη:



$$K_a(\text{HB}^+) = \frac{K_w}{K_b(\text{B})} = \frac{(x-z) \cdot x}{c-x} \quad (1)$$

$$K_b(\text{A}^-) = \frac{K_w}{K_a(\text{HA})} = \frac{(y-z) \cdot y}{c-y} \quad (2)$$

$$K_w = (x-z) \cdot (y-z) \quad (3)$$

Για το σύστημα των τριών εξισώσεων (1), (2) και (3) έχουμε τους παρακάτω περιορισμούς:

$$c > x, c > y, x > z, y > z, x > 0, y > 0 \quad (4)$$

i. αν $K_a(\text{HA}) = K_b(\text{B})$ τότε από τις (1) και (2) έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{(x-z) \cdot x}{c-x} &= \frac{(y-z) \cdot y}{c-y} \\ (x-z) \cdot x \cdot (c-y) &= (y-z) \cdot y \cdot (c-x) \\ cx^2 - x^2y - cxz + \cancel{xyz} &= cy^2 - xy^2 - cyz + \cancel{xyz} \\ c(x-y)(x+y) - xy(x-y) - cz(x-y) &= 0 \\ (x-y)(cx + cy - xy - cz) &= 0 \\ (x-y)[x(c-y) + c(y-z)] &= 0 \\ x-y &= 0 \\ x &= y \\ x-z &= y-z \end{aligned}$$

$$[\text{H}_3\text{O}^+] = [\text{OH}^-]$$

$$\text{pH} = 7$$

ii. αν $K_a(\text{HA}) > K_b(\text{B})$ τότε από τις (1) και (2) έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{(x-z) \cdot x}{c-x} &> \frac{(y-z) \cdot y}{c-y} \\ (x-z) \cdot x \cdot (c-y) &> (y-z) \cdot y \cdot (c-x) \\ cx^2 - x^2y - cxz + \cancel{xyz} &> cy^2 - xy^2 - cyz + \cancel{xyz} \\ c(x-y)(x+y) - xy(x-y) - cz(x-y) &> 0 \\ (x-y)(cx + cy - xy - cz) &> 0 \\ (x-y)[x(c-y) + c(y-z)] &> 0 \\ x-y &> 0 \\ x &> y \\ x-z &> y-z \\ [\text{H}_3\text{O}^+] &> [\text{OH}^-] \\ \text{pH} &< 7 \end{aligned}$$

iii. αν $K_a(\text{HA}) < K_b(\text{B})$ τότε από τις (1) και (2) έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{(x-z) \cdot x}{c-x} &< \frac{(y-z) \cdot y}{c-y} \\ (x-z) \cdot x \cdot (c-y) &< (y-z) \cdot y \cdot (c-x) \\ cx^2 - x^2y - cxz + \cancel{xyz} &< cy^2 - xy^2 - cyz + \cancel{xyz} \\ c(x-y)(x+y) - xy(x-y) - cz(x-y) &< 0 \\ (x-y)(cx + cy - xy - cz) &< 0 \\ (x-y)[x(c-y) + c(y-z)] &< 0 \\ x-y &< 0 \\ x &< y \\ x-z &< y-z \\ [\text{H}_3\text{O}^+] &< [\text{OH}^-] \\ \text{pH} &> 7 \end{aligned}$$